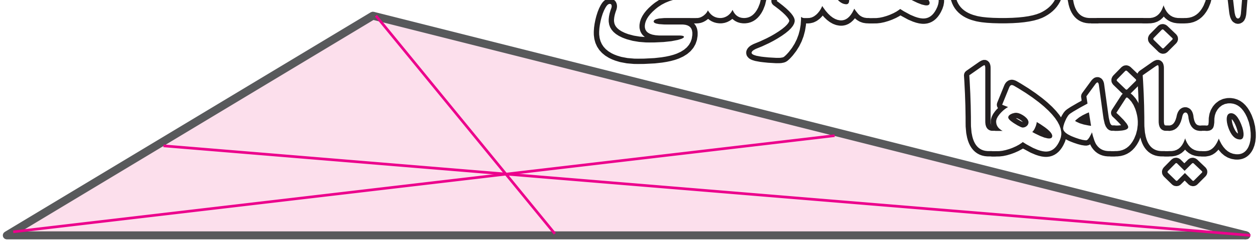
اثبات همرسی میانه‌ها



و چند نتیجهٔ دیگر به کمک مساحت‌ها

روح‌الله حسنی
کارشناس ارشد ریاضی محض
و دبیر ریاضی منطقه سنگر
استان گیلان

مقدمه

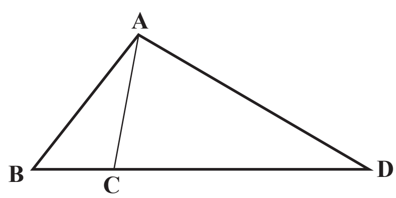
یکی از مفهوم‌هایی که دانش‌آموزان از سال‌های گذشته با آن آشنا هستند، طریقهٔ محاسبهٔ مساحت مثلث است که نتیجهٔ بلافاصلهٔ اصول موضوعهٔ مساحت است. درک درست این مفهوم ساده و کاربرد آن می‌تواند قضیه‌های زیادی را اثبات کند. در این نوشته با تمرکز روی فرمول محاسبهٔ مساحت مثلث و با استفاده از قضیه‌های مطرح شده در کتاب درسی، تلاش کرده‌ایم توان این فرمول را در حل و اثبات طیف وسیعی از مسئله‌ها و قضیه‌ها نشان دهیم.

بحث را با بیان نتیجه ساده‌ای از کتاب هندسه (۱) پایه دهم رشته ریاضی آغاز می‌کنیم.

نتیجهٔ ۱

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ قاعدهٔ آن‌هاست (شکل ۱).

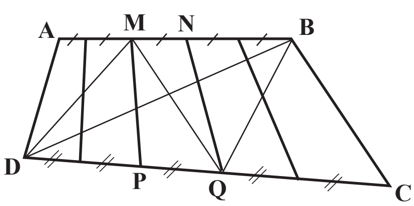
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}=\frac{BC}{CD},\ \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\frac{BC}{BD}$$



شکل۱

مثال ۱. در شکل ۲، چهارضلعی ABCD محدب است و اضلاع AB و CD هر یک به پنج قسمت مساوی تقسیم شده‌اند. مساحت چهارضلعی MNPQ چه کسری از مساحت چهارضلعی ABCD است؟

حل: از D به M و از M به Q وصل می‌کنیم. همچنین از Q به B و از B به D وصل می‌کنیم. بنابر نتیجهٔ قبل داریم:



شکل۲

$$\begin{cases}\dfrac{S_{\overset{\Delta}{PMQ}}}{S_{\overset{\Delta}{DMQ}}}=\dfrac{PQ}{DQ}=\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{PMQ}}=\dfrac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{DMQ}}\\[2ex] \dfrac{S_{\overset{\Delta}{MNQ}}}{S_{BMQ}}=\dfrac{MN}{MB}=\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MNQ}}=\dfrac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{BMQ}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ}=S_{\overset{\Delta}{PMQ}}+S_{\overset{\Delta}{MNQ}}=\frac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{DMQ}}+\frac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{BMQ}}$$

$$=\frac{۱}{۳}(S_{\overset{\Delta}{DMQ}}+S_{\overset{\Delta}{BMQ}})=\frac{۱}{۳}S_{DMBQ}\quad(۱)$$

از طرف دیگر:

$$\begin{cases}\dfrac{S_{\overset{\Delta}{DMB}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\dfrac{MB}{AB}=\dfrac{۳}{۵}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DMB}}=\dfrac{۳}{۵}S_{\overset{\Delta}{ABD}}\\[2ex] \dfrac{S_{\overset{\Delta}{DBQ}}}{S_{\overset{\Delta}{BDC}}}=\dfrac{DQ}{DC}=\dfrac{۳}{۵}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DBQ}}=\dfrac{۳}{۵}S_{\overset{\Delta}{BDC}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{DMBQ} = S_{\overset{\triangle}{DMB}} + S_{\overset{\triangle}{DBQ}} = \frac{3}{5} S_{\overset{\triangle}{ABD}} + \frac{3}{5} S_{\overset{\triangle}{BDC}}$$

$$= \frac{3}{5}\left(S_{\overset{\triangle}{ABD}} + S_{\overset{\triangle}{BDC}}\right) = \frac{3}{5} S_{\overset{\triangle}{ABCD}} \qquad (2)$$

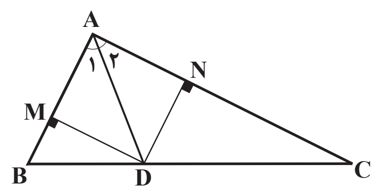
اکنون از (۱) و (۲) داریم:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{3} S_{DMBQ} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5} S_{ABCD}\right) = \frac{1}{5} S_{ABCD}$$

قضیهٔ ۱. (قضیهٔ نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی)

در هر مثلث، نیم‌ســاز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اضلاع آن زاویه تقسیم می کند.

فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ حکم: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$



شکل۳

اثبات: می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است. از D پای نیمساز بر AB و AC عمود کرده پای ارتفاع‌ها را به ترتیب M و N می‌نامیم. بنابراین DM=DN، پس:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ADC}}} = \frac{\frac{1}{2} DM \times AB}{\frac{1}{2} DN \times AC} = \frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

از طرف دیگر، بنابر نتیجهٔ بیان شــده در آغاز مطلب داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ADC}}} = \frac{BD}{CD} \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

گرچه این قضیه با استفاده از قضیه تالس در کتاب درسی اثبات شده است. اما این اثبات با کمک مساحت هم خالی از لطف نیست. به عنوان تمرین و با استفاده از مساحت مثلث نشان دهید:

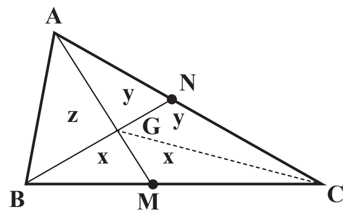
تمرین

نیمساز هر زاویه خارجی مثلث، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.

قضیهٔ ۲

در هر مثلث، دو میانه یکدیگر را به نســبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند.

اثبات: فرض کنیم دو میانهٔ AM و BN یکدیگر را در G قطع می‌کنند. قرار می‌دهیم $S_{\overset{\triangle}{ABG}} = z$ و داریم:



شکل۴

$$\overset{\triangle}{BGC}: \frac{S_{\overset{\triangle}{BGM}}}{S_{\overset{\triangle}{GMC}}} = \frac{BM}{CM} = 1 \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{BGM}} = S_{\overset{\triangle}{GMC}} = x \quad (1)$$

$$\overset{\triangle}{AGC}: \frac{S_{\overset{\triangle}{AGN}}}{S_{\overset{\triangle}{GNC}}} = \frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AGN}} = S_{\overset{\triangle}{GNC}} = y \quad (2)$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{\overset{\triangle}{AMC}}} = \frac{BM}{MC} = 1 \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABM}} = S_{\overset{\triangle}{AMC}}$$

$$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} x + z = x + 2y \Rightarrow z = 2y \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABG}} = 2S_{\overset{\triangle}{AGN}}$$

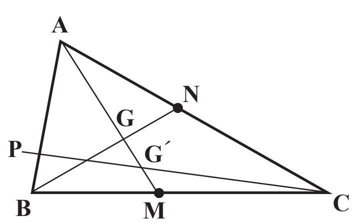
$$\Rightarrow \frac{GN}{BG} = \frac{S_{\overset{\triangle}{AGN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABG}}} = \frac{1}{2}$$

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد: $\frac{GM}{AG} = \frac{1}{2}$.

نتیجهٔ ۲

در هر مثلث سه میانه همرس‌اند.

اثبات: فرض کنیم در مثلث ABC، دو میانهٔ AM و BN یکدیگـــر را در G، و دو میانهٔ AM و CP یکدیگر را در ´G قطع کنند. بنا به قضیهٔ ۲ داریم:



شکل۵

$$\begin{cases}\dfrac{GM}{AG}=\dfrac{۱}{۲}\\[2mm] \dfrac{G'M}{AG'}=\dfrac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow \frac{GM}{AG}=\frac{G'M}{AG'}$$

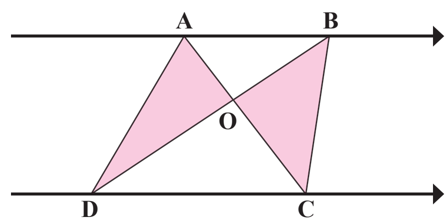
$$\xRightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{GM}{AG+GM}=\frac{G'M}{AG'+G'M}\Rightarrow \frac{GM}{AM}=\frac{G'M}{AM}$$

پس: G´M=GM. یعنی G و G´ برهم منطبق‌اند. لذا هر سه میانه در G همرس‌اند.

قضیهٔ زیر به عنوان ویژگی مساحت در کتاب درسی هندسه (۱) پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی بیان شده است. این قضیه به «قضیهٔ شبه پروانه‌ای» معروف است.

قضیهٔ ۳

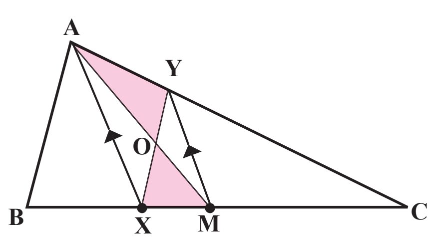
فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند، به‌طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O یکدیگر را قطع کنند. مساحت دو مثلث OAD و OBC با هم برابرند.



شکل۶

مثال۲. از نقطهٔ X واقع بر ضلع BC از مثلث ABC خطی رسم کنید، به‌طوری که مثلث ABC به دو ناحیهٔ هم مساحت تقسیم شود.

حل: فرض می‌کنیم M وسط ضلع BC باشد. از M به موازات AX خطی رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر را در Y قطع کند. خط گذرنده از XY جواب مسئله است. چون AM میانه است، پس:



شکل۷

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{MC}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMC}}=\frac{۱}{۲}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

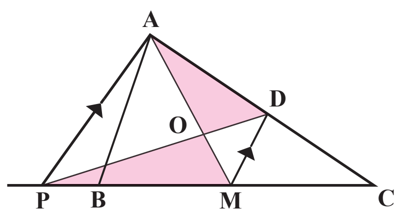
از طرف دیگر، چون AX و YM موازی‌اند، بنابر قضیهٔ شبه‌پروانه داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{AOY}}=S_{\overset{\triangle}{XOM}}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{CXY}}=S_{\overset{\triangle}{XOM}}+S_{MOYC}$$

$$=S_{\overset{\triangle}{AOY}}+S_{MOYC}=S_{\overset{\triangle}{AMC}}=\frac{۱}{۲}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

مثال ۳. در مثلث ABC، M وسط ضلع BC است و P نقطه‌ای دلخواه روی امتداد ضلع BC از طرف B است. از M خطی به موازات AP رسم می‌کنیم تا AC را در D قطع کند. مساحت مثلث PDC چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

حل: از P به D وصل می‌کنیم تا AM را در O قطع کند. چون DM موازی AP است، بنابر قضیهٔ شبه‌پروانه داریم:



شکل۸

$$S_{\overset{\triangle}{AOD}}=S_{\overset{\triangle}{POM}}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{PDC}}=S_{\overset{\triangle}{POM}}+S_{ODCM}=S_{\overset{\triangle}{AOD}}+S_{ODCM}=S_{\overset{\triangle}{AMC}}$$

اما چون AM میانه است، بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{MC}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMC}}=\frac{۱}{۲}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

در نتیجه: $S_{\overset{\triangle}{PDC}}=\frac{۱}{۲}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$

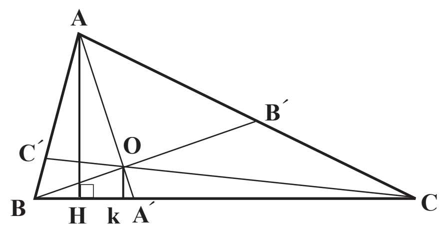
مثال ۴. در مثلث ABC، A´، B´ و C´ به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB طوری واقع‌اند که AA´، BB´ و CC´ در نقطهٔ O درون مثلث همرس باشند. نشان دهید:

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=۱ \quad \text{(رابطهٔ ژرگون)}$$

حل: از A و O بر BC عمود می‌کنیم و پای عمودها را به ترتیب H و K می‌نامیم.

$$\overset{\triangle}{AA'H} \text{ در}: OK \parallel AH$$

$$\xRightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{OA'}{AA'} = \frac{OK}{AH} = \frac{\frac{۱}{۲}OK.BC}{\frac{۱}{۲}AH.BC} = \frac{S_{\overset{\triangle}{BOC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$$



شکل۹

بههمین ترتیب میتوان نشان داد: $\frac{OB'}{BB'} = \frac{S_{\overset{\triangle}{AOC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$ و $\frac{OC'}{CC'} = \frac{S_{\overset{\triangle}{AOB}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$. بنابراین:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_{\overset{\triangle}{BOC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} + \frac{S_{\overset{\triangle}{AOC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} + \frac{S_{\overset{\triangle}{AOB}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = ۱$$

مثال ۵. نقاط M، N و P را به ترتیب روی BC، AB و AM چنان در نظر میگیریم که $AP = \frac{۱}{۴}AM$، $BN = \frac{۱}{۲}AN$ و $BM = \frac{۱}{۳}CM$. مساحت مثلث MNP چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

حل:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}} = \frac{MP}{AM} = \frac{AM - AP}{AM} = \frac{AM}{AM} - \frac{AP}{AM}$$

$$= ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

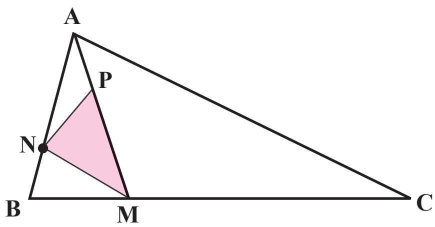
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABM}}} = \frac{AN}{AB} = \frac{AN}{AN + BN} = \frac{AN}{AN + \frac{۱}{۲}AN}$$

$$= \frac{AN}{\frac{۳}{۲}AN} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{BM}{BC} = \frac{BM}{BM + CM} = \frac{\frac{۱}{۳}CM}{\frac{۱}{۳}CM + CM}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۳}CM}{\frac{۴}{۳}CM} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}} . \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABM}}} . \frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۸}$$

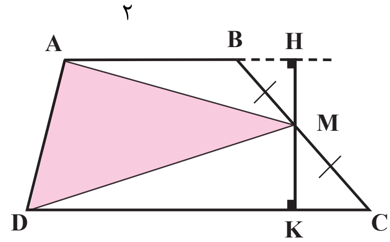


شکل۱۰

مثال ۶. در ذوزنقهٔ ABCD، M وسط ساق BC است. مساحت مثلث AMD چه کسری از مساحت ذوزنقه است.

حل: از M بر دو قاعده خطی عمود میکنیم تا آنها را در H و K قطع کند. HK ارتفاع ذوزنقه است. دو مثلث BHM و CMK به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده با هم همنهشت هستند، بنابراین:

$$HM = MK = \frac{HK}{۲}$$



شکل۱۱

$$S_{\overset{\triangle}{ABM}} = \frac{۱}{۲}HM.AB,\ S_{\overset{\triangle}{DMC}} = \frac{۱}{۲}MK.DC, S_{ABCD}$$

$$= \frac{۱}{۲}HK.(AB + CD)$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADM}} = S_{ABCD} - (S_{\overset{\triangle}{ABM}} + S_{\overset{\triangle}{DMC}})$$

$$= \frac{۱}{۲}HK(AB + CD) - (\frac{۱}{۲}HM.AB + \frac{۱}{۲}MK.DC)$$

$$= \frac{۱}{۲}HK(AB + CD) - \frac{۱}{۲}(\frac{HK}{۲}.AB + \frac{HK}{۲}.CD)$$

$$= \frac{۱}{۲}HK(AB + CD) - \frac{۱}{۴}HK(AB + CD)$$

$$= \frac{۱}{۴}HK(AB + CD) = \frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

***منابع**

۱. اصلاحپذیر، بهمن و قهرمانی، محمدحسین (۱۳۸۵). آموزش هندسهٔ ۱. انتشارات مبتکران. تهران. چاپ هشتم.
۲. حاجی بابایی و همکاران (۱۳۹۳). کتاب درسی هندسهٔ ۲، پایهٔ سوم ریاضی و فیزیک. سازمان پژوهش و برنامهریزی آموزشی وزارت آموزشوپرورش. تهران. چاپ بیستم.
۳. حاجیزاده، نادر؛ کرد، حسین؛ بازوی، صادق (۱۳۸۵). هندسهٔ ۱ (ویژهٔ دانشآموزان ممتاز). انتشارات خوشخوان. تهران. چاپ سوم.
۴. رحیمی، زهرا و همکاران (۱۳۹۵). کتاب درسی هندسهٔ (۱) پایهٔ دهم ریاضی و فیزیک. سازمان پژوهش و برنامهریزی آموزشی وزارت آموزشوپرورش. تهران. چاپ اول.